

Couvrez vite ces cycles que je ne saurais voir

Gaétan Berthe, LIRMM, Montpellier

en collaboration avec

Marin Bougeret, Daniel Gonçalves, LIRMM

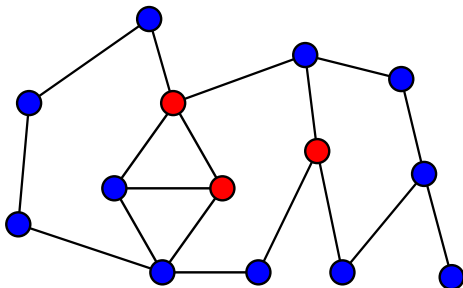
Jean-Florent Raymond, LIMOS

Couverture des cycles

Couverture des cycles

Définition

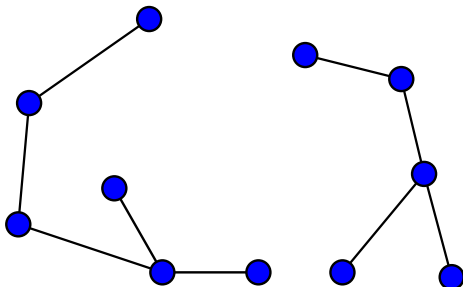
Ensemble $S \subset V(G)$ tel que pour tout cycle C , $V(C) \cap S \neq \emptyset$.



Couverture des cycles

Définition

Ensemble $S \subset V(G)$ tel que pour tout cycle C , $V(C) \cap S \neq \emptyset$.
On a alors $G \setminus S$ une forêt.



Complexité

Le problème de la couverture des cycles

Entrée : un graphe G , un entier k .

Question : Existe t'il une couverture des cycles de taille k .

Complexité

Le problème de la couverture des cycles

Entrée : un graphe G , un entier k .

Question : Existe t'il une couverture des cycles de taille k .

Complexité classique

Problème **NP-complet**. Peut être résolu en temps $\mathcal{O}(1.7347^n)$.

Complexité

Le problème de la couverture des cycles

Entrée : un graphe G , un entier k .

Question : Existe t'il une couverture des cycles de taille k .

Complexité classique

Problème **NP-complet**. Peut être résolu en temps $\mathcal{O}(1.7347^n)$.

Complexité paramétrée par k

Problème **FPT**. Peut être résolu en temps $3^k n^{\mathcal{O}(1)}$.

Existence d'algorithmes sous-exponentiels

Quelles améliorations possibles ?

Algorithme en $2^{o(n)}$? En $O(2^{\sqrt{n}})$?

Encore mieux, en $2^{\sqrt{k}} n^{O(1)}$?

Existence d'algorithmes sous-exponentiels

Quelles améliorations possibles ?

Algorithme en $2^{o(n)}$? En $O(2^{\sqrt{n}})$?

Encore mieux, en $2^{\sqrt{k}} n^{O(1)}$?

Probablement aucun algorithme sous-exponentiel

Si l'Exponential Time Hypothesis (ETH) est vérifiée, le problème de la couverture des cycles **ne peut pas être résolu en temps $2^{o(n)}$** .

Existence d'algorithmes sous-exponentiels

Quelles améliorations possibles ?

Algorithme en $2^{o(n)}$? En $O(2^{\sqrt{n}})$?

Encore mieux, en $2^{\sqrt{k}} n^{O(1)}$?

Probablement aucun algorithme sous-exponentiel

Si l'Exponential Time Hypothesis (ETH) est vérifiée, le problème de la couverture des cycles **ne peut pas être résolu en temps $2^{o(n)}$** .

Conclusion: peu probable de faire mieux... **dans le cas général.**

Couverture des cycles, le cas planaire

Planaire: Couverture des cycle en temps paramétré sous-exponentiel

Le problème de la couverture des cycles peut être résolu en temps $2^{O(\sqrt{k})} n^{O(1)}$ pour les graphes planaires.

Couverture des cycles, le cas planaire

Planaire: Couverture des cycle en temps paramétré sous-exponentiel

Le problème de la couverture des cycles peut être résolu en temps $2^{O(\sqrt{k})} n^{O(1)}$ pour les graphes planaires.

Utilise la méthode de la **bidimensionalité**. [Demaine et al., 2005]

Méthode de la bidimensionalité

Couverture des cycles de la grille

Dans une grille \boxplus_k , les couvertures des cycles sont de taille $\Omega(k^2)$.

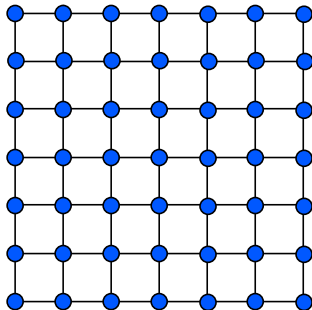


Figure: La grille \boxplus_7

Méthode de la bidimensionalité

Couverture des cycles de la grille

Dans une grille \boxplus_k , les couvertures des cycles sont de taille $\Omega(k^2)$.

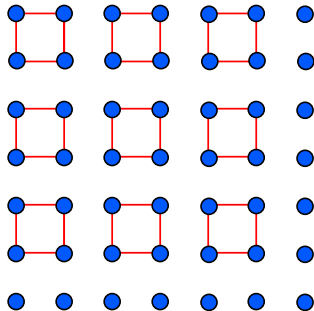


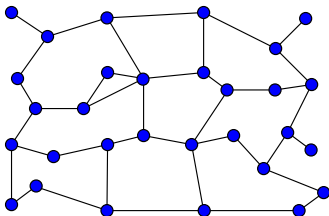
Figure: La grille \boxplus_7

Méthode de la bidimensionalité

Théorème de la grille mineur.

Un graphe planaire G a une grille \boxplus_t en mineur avec t de l'ordre de $tw(G)$.

Exemple

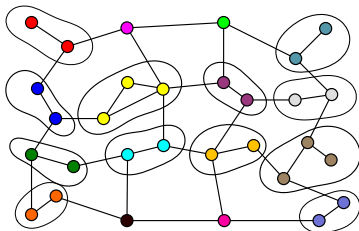


Méthode de la bidimensionalité

Théorème de la grille mineur.

Un graphe planaire G a une grille \boxplus_t en mineur avec t de l'ordre de $tw(G)$.

Exemple

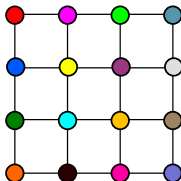


Méthode de la bidimensionalité

Théorème de la grille mineur.

Un graphe planaire G a une grille \boxplus_t en mineur avec t de l'ordre de $tw(G)$.

Exemple



Méthode de la bidimensionalité

Méthode générale

Deux cas possibles :

- Si $tw(G) = O(\sqrt{k}) \Rightarrow$ Résolution en $tw(G)^{O(tw(G))} = 2^{O(\sqrt{k} \log k)}$.
- Sinon G contient une grosse grille \Rightarrow Renvoyer NON.

Méthode de la bidimensionalité

Méthode générale

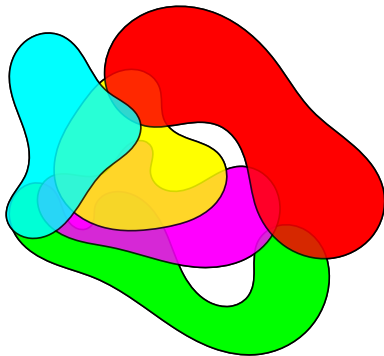
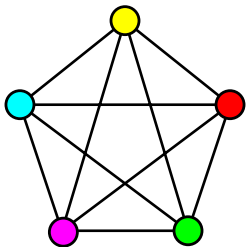
Deux cas possibles :

- Si $tw(G) = O(\sqrt{k}) \Rightarrow$ Résolution en $tw(G)^{O(tw(G))} = 2^{O(\sqrt{k} \log k)}$.
- Sinon G contient une grosse grille \Rightarrow Renvoyer NON.

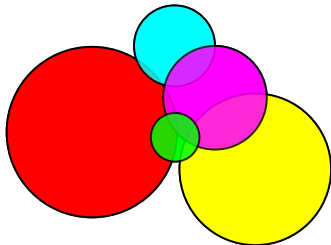
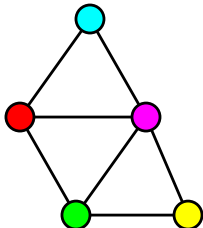
Et pour les autres classes de graphes ?

Graphes d'intersection dans le plan

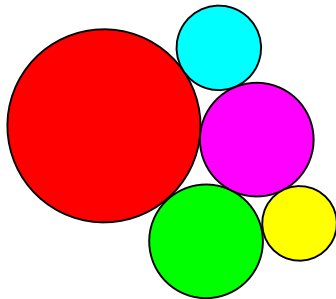
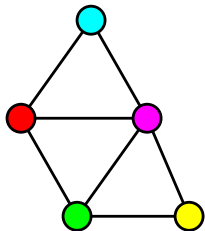
Intersections d'ensembles connexes (Patatoïdes)



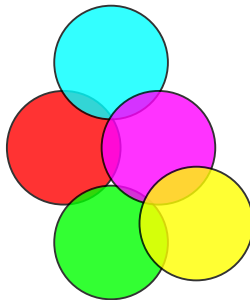
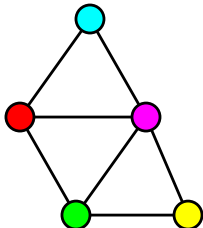
Intersections de disques



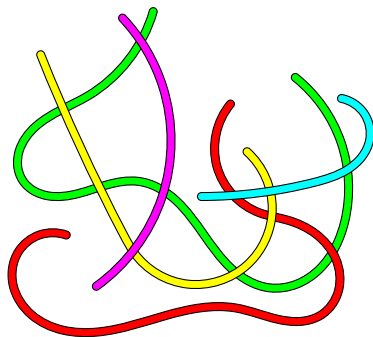
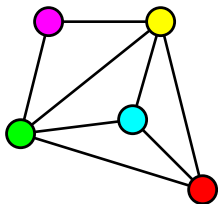
Contacts de disques = Graphes planaires



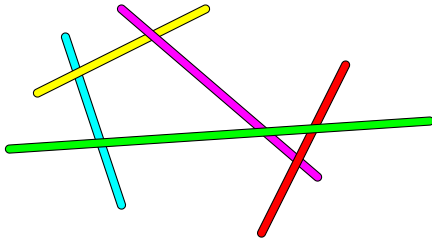
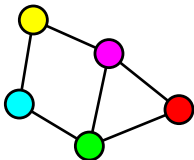
Intersections de disques unitaires



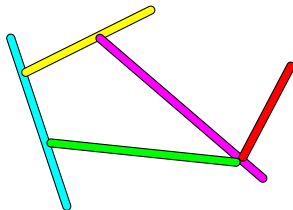
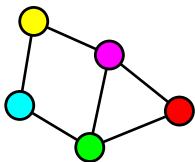
Intersections de courbes



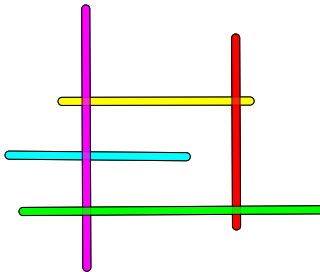
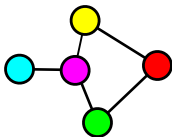
Intersections de segments



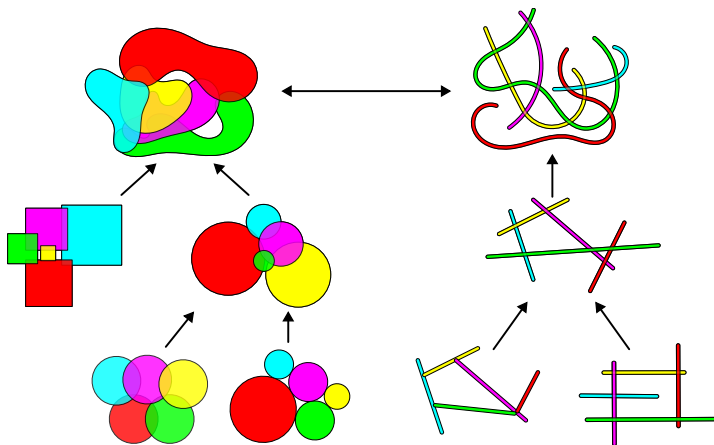
Contacts de segments



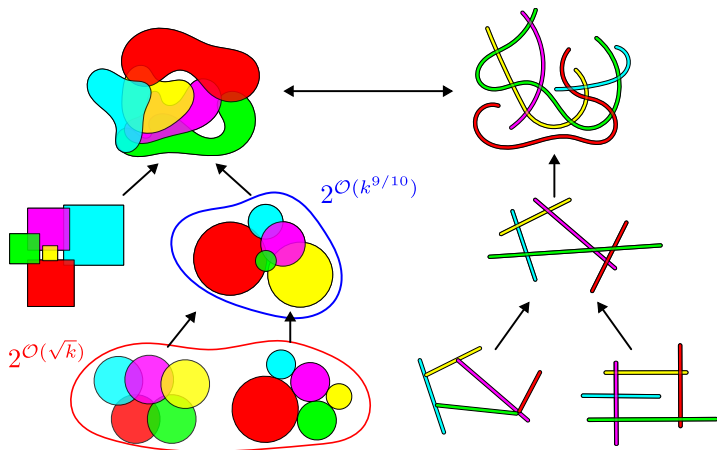
Intersections de segments 2-DIR



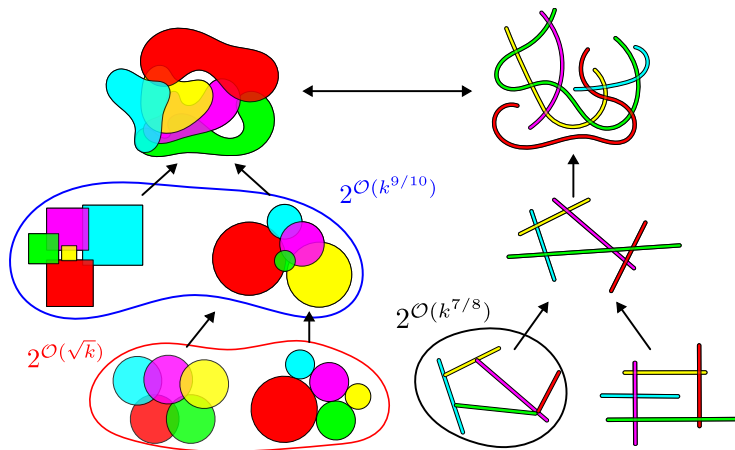
Où chercher à améliorer



Où chercher à améliorer



Où chercher à améliorer



La méthode ASQGM

Relation entre taille de grille et largeur arborescente

$\boxplus(\mathbf{G})$: taille de la plus grande grille mineure de G .

SQGM et ASQGM

Graphes planaires : $\mathbf{tw}(\mathbf{G}) = \mathcal{O}(\boxplus(\mathbf{G}))$.

Relation entre taille de grille et largeur arborescente

$\boxplus(\mathbf{G})$: taille de la plus grande grille mineure de G .

SQGM et ASQGM

Graphes planaires : $\mathbf{tw}(\mathbf{G}) = \mathcal{O}(\boxplus(\mathbf{G}))$.

Intersection de disques unitaires : $\mathbf{tw}(\mathbf{G}) = \mathcal{O}(\omega(\mathbf{G}) \boxplus(\mathbf{G}))$.

Relation entre taille de grille et largeur arborescente

$\boxplus(\mathbf{G})$: taille de la plus grande grille mineure de G .

SQGM et ASQGM

Graphes planaires : $\mathbf{tw}(\mathbf{G}) = \mathcal{O}(\boxplus(\mathbf{G}))$.

Intersection de disques unitaires : $\mathbf{tw}(\mathbf{G}) = \mathcal{O}(\omega(\mathbf{G}) \boxplus(\mathbf{G}))$.

Intersection de carrés : $\mathbf{tw}(\mathbf{G}) \stackrel{?}{=} \mathcal{O}(\mathbf{f}(\mathbf{G}) \boxplus(\mathbf{G}))$.

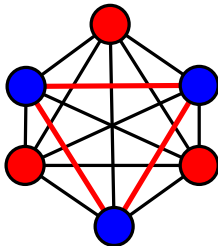
Contact de segments : $\mathbf{tw}(\mathbf{G}) \stackrel{?}{=} \mathcal{O}(\mathbf{f}(\mathbf{G}) \boxplus(\mathbf{G}))$.

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Les grosses cliques

Observation

Pour chaque clique C de G , une couverture des cycles contient tous les sommets de C sauf au plus 2 sommets.



La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Les grosses cliques

Observation

Pour chaque clique C de G , une couverture des cycles contient tous les sommets de C sauf au plus 2 sommets.

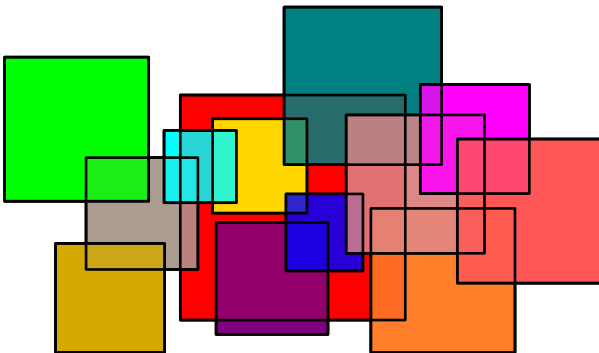
Conséquence : bornage des cliques

On peut se ramener à $2^{\mathcal{O}(k/\omega)}$ instances avec $\omega(G) \leq \omega$.

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Graphe de configuration

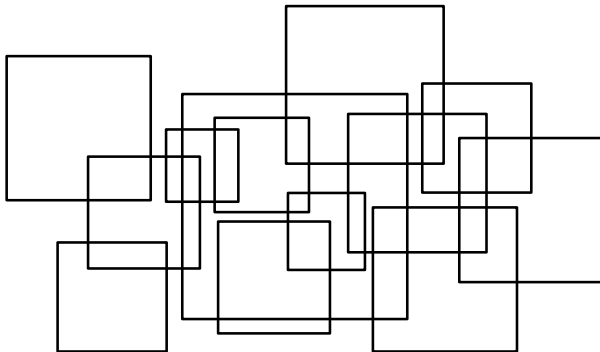
Définition du graphe de configuration A



La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Graphe de configuration

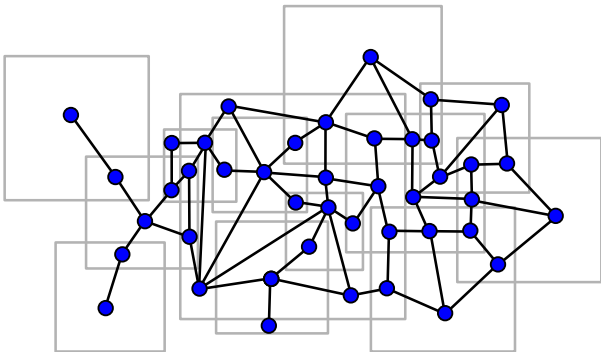
Définition du graphe de configuration A



La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Graphe de configuration

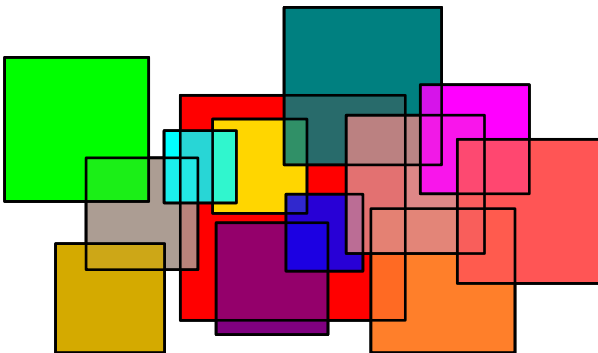
Définition du graphe de configuration A



La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Graphe de configuration

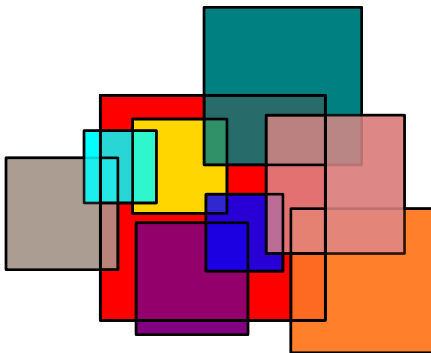
Définition du graphe de configuration $A[v]$



La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Grphe de configuration

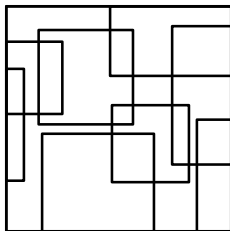
Définition du graphe de configuration $A[v]$



La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Graphe de configuration

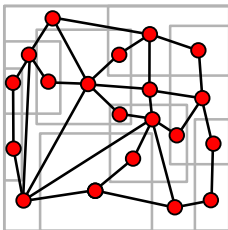
Définition du graphe de configuration $A[v]$



La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Graphe de configuration

Définition du graphe de configuration $A[v]$



$$\text{diam}(A[v]) = 6.$$

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Diamètre local

Diamètre local

$$\mathbf{LD}(\mathbf{G}) = \max_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbf{G})} \mathbf{diam}(\mathbf{A}[\mathbf{v}]).$$

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Diamètre local

Diamètre local

$$\mathbf{LD}(\mathbf{G}) = \max_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbf{G})} \mathbf{diam}(\mathbf{A}[\mathbf{v}]).$$

Théorème

$$\mathbf{tw}(\mathbf{G}) = \mathcal{O}(\omega(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{LD}(\mathbf{G}) \cdot \boxplus(\mathbf{G}))$$

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Diamètre local

Diamètre local

$$\mathbf{LD}(\mathbf{G}) = \max_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbf{G})} \mathbf{diam}(\mathbf{A}[\mathbf{v}]).$$

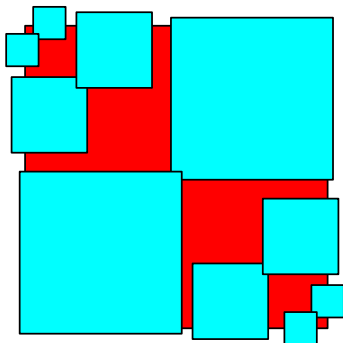
Théorème

$$\mathbf{tw}(\mathbf{G}) = \mathcal{O}(\omega(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{LD}(\mathbf{G}) \cdot \boxplus(\mathbf{G}))$$

On cherche donc à majorer **le diamètre local**.

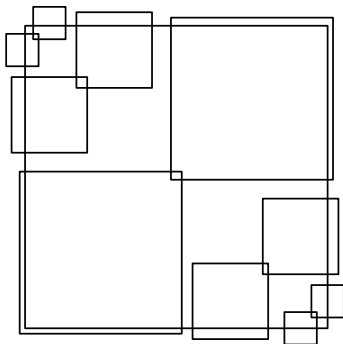
La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Exemple de grand diamètre local



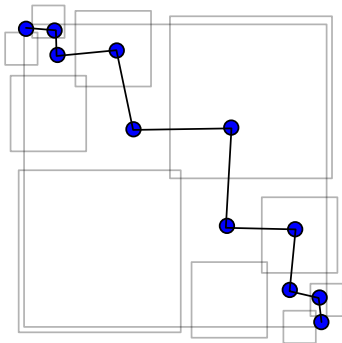
La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Exemple de grand diamètre local



La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Exemple de grand diamètre local



$\text{diam}(\mathbf{A}[\mathbf{v}]) = 10$. On a un gros matching dans le voisinage !

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Borner le diamètre local

d_{Δ}

Pour un carré v , on note d_{Δ} la taille du plus gros matching parmi les carrés voisins de v , plus petits que v .

$$d_{\Delta}(G) = \max_{v \in G} d_{\Delta}(v).$$

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Borner le diamètre local

d_{Δ}

Pour un carré v , on note d_{Δ} la taille du plus gros matching parmi les carrés voisins de v , plus petits que v .

$$d_{\Delta}(G) = \max_{v \in G} d_{\Delta}(v).$$

Borner d_{Δ} est suffisant

$$LD(G) \leq \mathcal{O}(\omega + d_{\Delta}(G))$$

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Borner le diamètre local

d_Δ

Pour un carré v , on note d_Δ la taille du plus gros matching parmi les carrés voisins de v , plus petits que v .

$$d_\Delta(G) = \max_{v \in G} d_\Delta(v).$$

Borner d_Δ est suffisant

$$LD(G) \leq \mathcal{O}(\omega + d_\Delta(G))$$

On peut se ramener au cas $d_\Delta(G)$ petit

On peut se ramener à $2^{\mathcal{O}(k/\omega)}$ instances (G, k) qui ont un ensemble B de k/ω sommets tel que pour $v \in V(G) \setminus B$, $d_\Delta(v) < \omega^3$.

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Majoration de la largeur arborescente

Dans $G' = G \setminus B$

$$\text{diam}(H[\mathcal{C}_v]) = \mathcal{O}(\omega(G') + d_\Delta(G')) = \mathcal{O}(\omega + \omega^3) = \mathcal{O}(\omega^3)$$

$$LD(G') = \max_{v \in V(G')} \text{diam}(A[v]) = \mathcal{O}(\omega^3)$$

$$tw(G') = \mathcal{O}(\omega(G')LD(G') \boxplus(G')) = \mathcal{O}(\omega^4 \boxplus(G))$$

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Majoration de la largeur arborescente

Dans $G' = G \setminus B$

$$\text{diam}(H[C_v]) = \mathcal{O}(\omega(G') + d_\Delta(G')) = \mathcal{O}(\omega + \omega^3) = \mathcal{O}(\omega^3)$$

$$LD(G') = \max_{v \in V(G')} \text{diam}(A[v]) = \mathcal{O}(\omega^3)$$

$$tw(G') = \mathcal{O}(\omega(G')LD(G') \boxplus(G')) = \mathcal{O}(\omega^4 \boxplus(G))$$

Dans $G' = G \setminus B$

$$tw(G) \leq tw(G') + |B| = \mathcal{O}(\omega^4 \boxplus(G)) + k/\omega$$

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Application de la bidimensionalité

On a obtenu $tw(G) = \mathcal{O}(\omega^4 \boxplus(G) + k/\omega)$.

Avec $\omega = k^{1/10}$ on a alors :

$$tw(\mathbf{G}) = \mathcal{O}(k^{4/10} \boxplus(\mathbf{G}) + k^{9/10})$$

Deux cas possibles :

- Si $\boxplus(G) = \mathcal{O}(\sqrt{k})$ on a alors $tw(G) = \mathcal{O}(k^{9/10})$.
- Sinon, on a une NON instance.

La méthode ASQGM pour les intersections de carrés

Complexité finale

On a $k^{\mathcal{O}(k^{9/10})}$ instances.

Chaque instance non triviale peut être résolu en temps

$$tw(G)^{tw(G)} = k^{\mathcal{O}(k^{9/10})}.$$

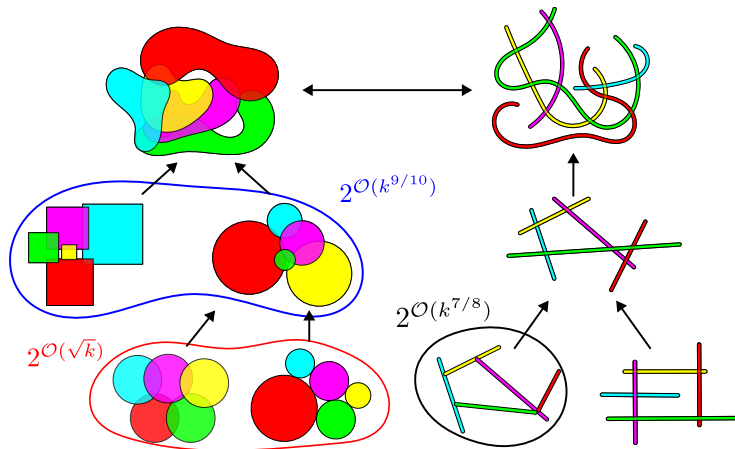
Théorème

Le problème de la couverture des cycles dans les graphes d'intersections de carrés peut être résolu en temps

$$2^{\tilde{\mathcal{O}}(k^{9/10})} n^{\mathcal{O}(1)}.$$

Conclusion

Conclusion





Merci de votre attention !

